Innleveringsoppgaver

1 Finn fikspunktene til rekursjonen

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

Hva blir grenseverdien hvis $a_0 = 2$?

Løsning:
Et fikspunkt er et tall a slik at $a = 2 - 1/a$. Dvs.

$$0 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2.$$

Rekursjonen har ett fikspunkt $a = 1$.

Hvis rekursjonen konvergerer, så er $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 1$. Vi sjekker om rekursjonen konvergerer ved å gjøre følgende:

$$\text{Vi har } a_0 = 2 \text{ og } a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

Dermed får vi:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 - \frac{1}{a_0} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\\
a_2 &= 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\\
a_3 &= 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.\\
a_4 &= 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{\frac{5}{4}} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}.\\
&\cdots
\end{aligned}$$

og vi kan gjette fram til at a_n blir:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}.$$

Ved å dele både nevneren og telleren på $\frac{1}{n}$, ser vi at rekursjonen konvergerer til 1, når $n \to \infty$:

$$a_n = \frac{\frac{n+2}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \implies a_n = 1, \text{ når } n \to \infty.$$

$\boxed{2}$ Regn ut a_2, a_3, a_4, ... a_7, når a_n er gitt ved

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_{n+1} = a_n + 2 \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Gjett på et uttrykk $a_n = f(n)$ og sett det inn formelen i

$$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot a_{n-1}$$

for å vise at det stemmer.

Løsning:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2a_0 = 2 + 2 = 4, \\ a_3 &= a_2 + 2a_1 = 4 + 2 = 8, \\ a_4 &= a_3 + 2a_2 = 8 + 8 = 16, \\ a_5 &= a_4 + 2a_3 = 16 + 16 = 32, \\ a_6 &= a_5 + 2a_4 = 32 + 32 = 64, \\ a_7 &= a_6 + 2a_5 = 64 + 64 = 128. \end{aligned}$$

Det virker som om $a_n = 2^n$. Vi sjekker om det stemmer: $a_0 = 2^0 = 1$, $a_1 = 2^1 = 2$. Ok.

$$a_n + 2a_{n-1} = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = a_{n+1}.$$

Ok.

$\boxed{3}$ Husk at *Fibonacci-tallene* er gitt rekursivt ved

$$\begin{cases} F_0 = 1, \\ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

a) Regn ut F_5 og F_{10} ved å bruke rekursjonsformelen over.

Løsning:
For å bruke rekursjonsformelen til å finne F_5 og F_{10} går vi fram på den måten:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 5 + 3 = 8 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 8 + 5 = 13 \\ F_7 &= F_6 + F_5 = 13 + 8 = 21 \\ F_8 &= F_7 + F_6 = 21 + 13 = 34 \\ F_9 &= F_8 + F_7 = 34 + 21 = 55 \\ F_{10} &= F_9 + F_8 = 55 + 34 = 89. \end{aligned}$$

b) Som i Oppgave 2 går det ofte an å gjette seg frem til et uttrykk $F_n = g(n)$. Uttrykket for Fibonacci-tallene er kanskje ikke så lett å gjette seg frem til på stående fot, men det er faktisk slik at

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}, \tag{1}$$

der $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er de to løsningene på ligningen $x^2 = x - 1$. Tallet φ kalles det *gylne snitt.*
Regn ut F_5 og F_{10} ved å bruke formelen (1). Får du samme svar som i **a)**?

Løsning:
For å bruke formelen (1), finner vi først verdiene av φ og ψ i form av desimaltall:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2.23606797}{2} = \frac{3.23606797}{2} = 1.618034$$

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2.23606797}{2} = \frac{-1.23606797}{2} = -0.618034$$

Dermed ved bruk av formel (1), får vi:

$$F_5 = \frac{(1.618034)^6 - (-0.618034)^6}{\sqrt{5}} = 8.000000332059 \approx 8.$$

og

$$F_{10} = \frac{(1.618034)^{10} - (-0.618034)^{10}}{\sqrt{5}} = 89.000006807213 \approx 89.$$

som stemmer med de verdiene vi fant i **a)**.