Innleveringsoppgaver

$\boxed{1}$ Regn ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x}.$$

Løsning:
Uttrykket er på den ubestemte formen $\frac{0}{0}$, så vi bruker Konjugat-metoden for å simplifisere den (se oppgave 4, øving 3). Vi lar $a = \sqrt{x^2+3}$, $b = \sqrt{3}$ og ganger det gitte uttrykket med $\dfrac{a+b}{a+b}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3})}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2-(\sqrt{3})^2}{x\cdot(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3-3}{x\cdot(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\cdot(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Regn ut grenseverdiene.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{5x^2+3}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \left(\sin(x^2-3)+2e^{x^2}-3x^4+2\right)$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)$. (Hint: Bruk skviseteoremet!)

Løsning: a)
Uttrykket er ubestemt av type $\frac{\infty}{\infty}$. Det enkelt å merke at høyeste potens både i nevneren

og telleren er x^2 og dermed kan vi dele dem begge på x^2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{5x^2+3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2+2x/x^2+3/x^2}{5x^2/x^2+3/x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^3}{5+3/x^2}\\ &= \frac{1+0+0}{5+0}\\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Vi ser at grenseverdien er $1/5$.

Definisjon 1. *En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ kalles kontinuerlig i et punkt $a \in A$ dersom* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Løsning: b)
Funksjonen $f(x) := \sin(x^2-3)+2e^{x^2}-3x^4+2$ er kontinuerlig da den består av kontinuerlige funksjoner (sinus, exp og polynomer), så

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x) &= f(\sqrt{3})\\ &= \sin 0 + 2e^3 - 3\cdot 3^2 + 2\\ &= 0 + 2e^3 - 27 + 2\\ &= 2e^3 - 25.\end{aligned}$$

Løsning: c)
Den siste faktoren vil svinge mellom -1 og 1 raskere og raskere ettersom $\frac{1}{x-\pi} \to \pm\infty$ når $x \to \pi$. Likevel er det mulig at grenseverdien eksisterer fordi $\sin x \to 0$. Vi vet at $|\cos y| \leq 1$ for alle y, så

$$\left|\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right| \leq |\sin x|, \qquad x \neq \pi.$$

Dermed er

$$-|\sin x| \leq \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) \leq |\sin x|, \qquad (|z| \leq a \iff -a \leq z \leq a)$$

for alle $x \neq \pi$ og ettersom $\lim_{x\to\pi} \pm|\sin x| = 0$ så gir skviseteoremet at

$$\lim_{x\to\pi}\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = 0.$$

$\boxed{3}$ Bestem konstanten k slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{for } x \geq 0,\\ \frac{\sin(kx)}{x}, & \text{for } x < 0,\end{cases}$$

er kontinuerlig i punktet $x = 0$.
(Hint: Se på venstre og høyre grenseverdi hver for seg. For den venstre grense verdien kan det være lurt å sette $\theta = kx$.)

Løsning:
Vi må finne k slik at $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
Vi er gitt at for $x \geq 0, f(x) = x^2 + 4$, som er et polynom og dermed kontinuerlig. Derfor blir grensen fra høyre lik funksjonsverdien:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0^2 + 4 = 4$$

og grensen fra venstre vil være:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(kx)}{x} \\
&= k \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(kx)}{kx} \\
&= k \lim_{kx\to 0^-} \frac{\sin(kx)}{kx}, \qquad (x \to 0 \ \Rightarrow \ kx \to 0), \\
&= k \cdot 1 = k.
\end{aligned}$$

Dermed vil f være kontinuerlig i $x = 0$ hvis og bare hvis $k = 4$.