LF Maple 2 H18

Question 1: (1 point)

Finn tangenten til funksjonen

$$f(x) = 4\cos(6x)$$

i punktet $x = 7$. Hvis din likning for tangenten er $y = ax + b$ så skal svaret ditt være $ax + b$.
Svaret må være eksakt. Bruk gjerne funksjoner som $\sin()$ og $\cos()$ til å uttrykke svaret i stedet for å regne dem ut.

____

Oppskrift:

1) Finn punktet tangenten tangerer kurven.
2) Finn stigningstallet til tangenten, som er det samme som stigningstallet til funksjonen i punktet tangenten tangerer kurven.
3) Finn tangenten ved å bruke tangentlinjen $y = a(x - x_0) + y_0$

Da får vi følgende framgangsmåte:

$$f(x) = 4\cos(6x)$$

$$f'(x) = -24\sin(6x)$$

Må finne a og b i $y = ax + b$:

$f(7) = 4\cos(6 \cdot 7) = 4\cos(42)$

Stigningstallet a er: $a = f'(7) = -24 \cdot \sin(6 \cdot 7) = -24\sin(42)$

Vi kan bruke tangentlikningen: $y - y_0 = a(x - x_0) \quad \rightarrow y = a(x - x_0) + y_0$

$$y = -24\sin(42)\,(x - 7) + 4\cos(42) = -24\sin(42)\,x + 168\sin(42) + 4\cos(42)$$
$$= -24\sin(42)\,x + 168\sin(42) + 4\cos(42)$$

Question 2: (1 point)

Regn ut

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{f(x)}\right)$$

i punktet $x = 3$, gitt at $f(3) = 2$ og $f'(3) = 4$.

____

Framgangsmåte:

1) Bruk kvotientregelen: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{f(x)}\right) = \frac{4x^3 \cdot f(x) - x^4 \cdot f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

Bruker verdiene som har blitt oppgitt i oppgaveteksten for $x = 3$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{f(x)}\right) = \frac{4 \cdot 3^3 \cdot 2 - 3^4 \cdot 4}{2^2} = -27$$

Question 3: (1 point)

Finn k slik at $y - 16x = k$ er en normal til kurven

$$y = \frac{1}{|x-2|}.$$

Du kan bruke funksjonene sqrt() eller ^(1/2) for å uttrykke kvadratrøtter i svaret i stedet for å regne dem ut.

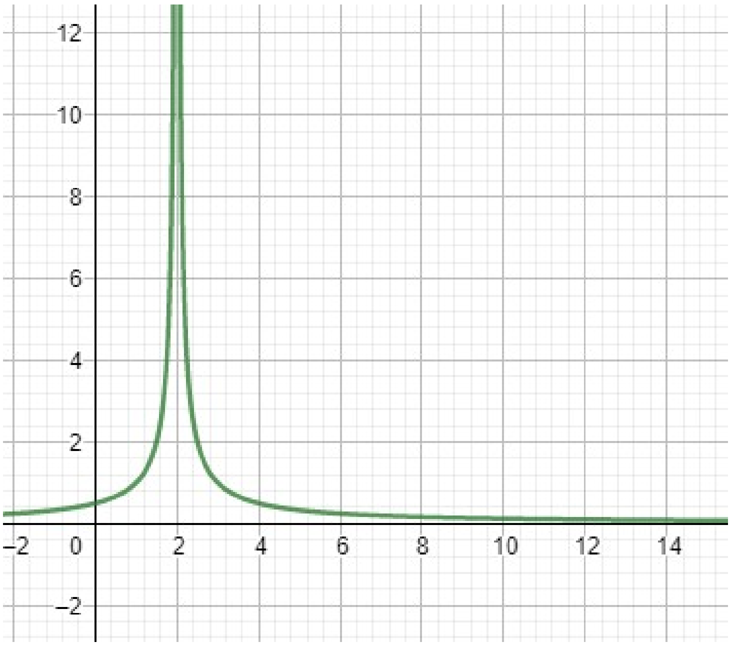
Svaret skal være et eksakt, reelt tall. Bruk derfor brøker og kvadratrøtter til å uttrykke svaret hvis det trengs (f.eks. hvis svaret er et stygt desimaltall), for å være sikker på at Maple T.A. gjenkjenner svaret.

Hint: Tegn grafen.

Framgangsmåte:

1) Finn stigningstallet til normalen.
2) Finn hvilket punkt normalen går igjennom.
3) Finn tangenten ved å bruke tangentlikningen.
4) Deriverte av absoluttverdi $|x|' = \frac{x}{|x|}$ så er det bare å bruke kjerneregel.

Grafen:



Stigningstallet til normalen kan finnes ved å bruke stigningstallet til tangenten på følgende måte:

$$a_{normal} = -\frac{1}{a_{tangent}}$$

$$a_{tangent} = y' = \left(\frac{1}{u}\right)' \cdot u' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{x-2}{|x-2|} = -\frac{x-2}{|x-2|^3}$$

$$\rightarrow a_{normal} = -\frac{1}{-\frac{x-2}{|x-2|^3}} = \frac{|x-2|^3}{x-2}$$

Ser fra oppgaven at normalen skal være på formen $y - 16x = k$. Derfor må $a_{normal} = 16$

$$\frac{|x-2|^3}{x-2} = 16 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (x-2)^2 = 16 & for\ x > 2 \\ -(x-2)^2 = 16 & for\ x < 2 \end{cases}$$

$(x-2)^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x = 6$ eneste løsning når $x > 2$.

$-(x-2)^2 = 16$ har ingen løsning.

Dermed er den eneste løsningen $x = 6$.

$$y(6) = \frac{1}{6-2} = \frac{1}{4}$$

Dermed finner vi k ved å bruke tangentlinja:

$$y = a(x - x_0) + y_0 = 16(x-6) + \frac{1}{4} = 16x - 96 + \frac{1}{4} = 16x - \frac{383}{4}$$

Ser at $k = -\frac{383}{4}$

Question 4: (1 point)

Bestem verdien på konstantene k og m slik at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx + m & x < 0 \\ 10\tan(7x) + 5\cos(9x) & x \geq 0 \end{cases}$$

på intervallet $(-\pi/14, \pi/14)$ er deriverbar. Svaret skal gis kommaseparert på formen "k, m" uten anførselstegn. k og m må være to eksakte reelle tall, og må skrives inn i riktig rekkefølge.

Framgangsmåte:

1) Finne ut hvilke punkter som er kritiske.
2) Bestemme funksjonen slik at de to kravene til deriverbarhet oppfylles.

Ser at det kritiske punktet er x=0:

Hva må til for at en funksjon skal være deriverbar?

1. Funksjonen er kontinuerlig i $x = a$.
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$. Dette i praksis betyr stigningstallene må gå mot hverandre når vi nærmer oss punktet.

Må oppfylle krav 1. Derfor må de ha samme verdi i $x = 0$:

$$m = 10(\tan(0)) + 5\cos(0) = 5$$

Må oppfylle krav 2. Derfor finner vi først $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + k \\ \dfrac{70}{\cos^2(7x)} - 45\sin(9x) \end{cases}$$

Setter de ulike funksjonene lik hverandre i x=0:

$$k = \frac{70}{[\cos(0)]^2} - 45\sin(0) = 70$$

Dermed: $m = 5, k = 70$

Question 5: (1 point)

Hvis p er et andreordens polynom vi har følgende informasjon om:

$$p(-3) = 5, \quad p'(-3) = -2 \text{ og } p''(-5) = -2.$$

Hva er $p(1)$? Svaret skal være et heltall.

Framgangsmåte:

1) Bruker et generelt andreordenspolynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ til å lage et sett med likninger.
2) Bruker opplysningene i oppgaven til å finne a,b og c.

Et generelt andreordens polynom ser slik ut: $f(x) = ax^2 + bx + c$, der a, b og c er konstanter.

For å bestemme polynomet, må vi bestemme konstantene a, b og c

Det gir:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

Bruker informasjon fra oppgaven til å bestemme konstantene a, b og c.

$p(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 5$

$9a - 3b + c = 5$ *(1)*

$p'(-3) = 2a \cdot (-3) + b = -2$

$-6a + b = -2$ *(2)*

$p''(-5) = 2a = -2$

$2a = -2$ *(3)*

Likningssystemet vi må løse blir da likningene (1), (2) og (3). Lettere å løse siste, så gå oppover:

$2a = -2 \rightarrow a = -1$

$-6a + b = -2 \rightarrow b = -2 + 6a = -2 - 6 = -8$

$9a - 3b + c = 5 \rightarrow c = 5 - 9a + 3b = 5 + 9 - 24 = -10$

Polynomet vårt er: $p(x) = -x^2 - 8x - 10$

Dette gir: $p(1) = -1 - 8 - 10 = -19$

Question 6: (1 point)

Anta at $F(x)$ er en funksjon slik at $F'(x) = \sqrt{x+2}$. Videre vet vi at $F(2) = 2$. Bruk metoden beskrevet i avsnitt 2.7 til å finne en tilnærmet verdi av $F(2.04)$.

____

Framgangsmåte:

1) Bruker metode fra 2.7 i læreboka til å tilnærme den nye løsningen.

Bruker bare den deriverte til å tilnærme Δy.

$\Delta y = F'(2) \cdot \Delta x = 2 \cdot 0.04 = 0.08.$

Dermed: $F(2.04) \approx 2 + 0.08 = 2.08$